Στον Ορισμό της βάσης:
Μια συλλογή $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{E})$ λέγεται βάση μιας τοπολογίας $\mathcal{J}$ του $\mathcal{E}$ αν $\mathcal{J} = \mathcal{B}_{\mathcal{E}}$.
Η τοπολογία υπάρχει, την έχω ήδη.

Στην ΠΡΟΤΑΣΗ:
$\bigcup \mathcal{B} = \mathcal{E}$ και $[(\forall B_1, B_2) \in \mathcal{B}) \; x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow (\exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq B_1 \cap B_2)]$
Η τοπολογία δεν υπάρχει ήδη, αλλά την φτιάχνω.

- **Box Topology**

$$\bigcup B = \bigcup_{\substack{U \in \tau_1 \\ V \in \tau_2}} (U \times V) \subseteq \bigcup_{\substack{U \in \tau_1 \\ V \in \tau_2}} (\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2) \subseteq (\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)$$

Επίσης, $\left.\begin{array}{l} \mathcal{E}_1 \in \tau_1 \\ \mathcal{E}_2 \in \tau_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \subseteq \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{E}_1 \\ V \in \mathcal{E}_2}} (U \times V)$

Θ.δ.ο. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{E} \; \forall x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B \in \mathcal{E} : x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$
Ας είναι $B_1 = U_1 \times V_1$, $B_2 = U_2 \times V_2$, $U_{1,2} \in \tau_1$, $V_{1,2} \in \tau_2$ και
- $x = (a, b) \in B_1 \times B_2$

Είναι $B_1 \cap B_2 = (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) \overset{(*)}{=} (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$
μη $U = U_1 \cap U_2 \in \tau_1$ $V = V_1 \cap V_2 \in \tau_2$
Άρα $B = B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ με $x \in \mathcal{B}$.
(*) Το αποδεικνύω!

Προφανώς, άμα $(\mathcal{E}_1, \tau_1), (\mathcal{E}_2, \tau_2), \ldots, (\mathcal{E}_n, \tau_n)$ και θέλω $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \ldots \times \mathcal{E}_n$

Τότε η box topology θα ορίζεται ως εξής:

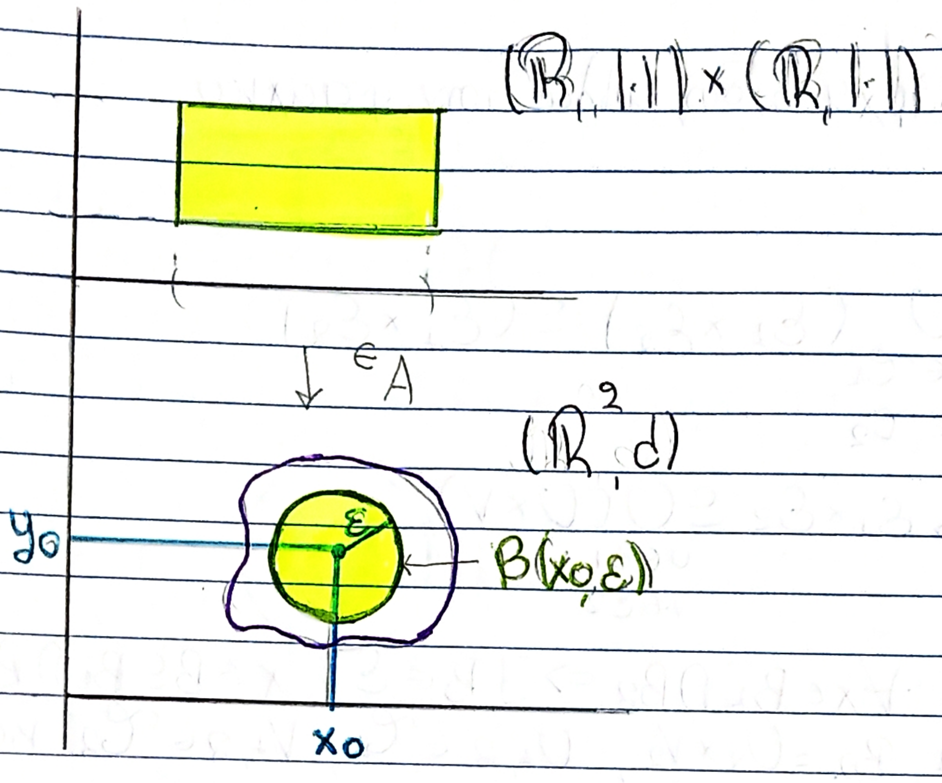
$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n,\; U_i \in \tau_i,\; i = 1, \ldots, n\}$. $\tau_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_{\mathcal{E}}$

• Η $(\mathbb{R}^2, d)$ ισοδυναμεί με την $(\mathbb{R}, |\cdot|)\times(\mathbb{R}, |\cdot|)$

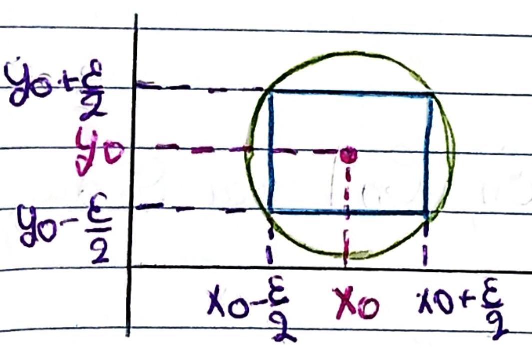
$\mathcal{T}_d$ ↳ έχουν, δηλαδή, τα ίδια ανοιχτά σύνολα

Παίρνω ένα $A \in \mathcal{T}_d$, $x \in A$ $\exists\, \varepsilon>0 : B(x,\varepsilon) \subseteq A$.

Πρέπει ν.δ.ο. το παραπάνω σύνολο βρίσκεται στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)\times(\mathbb{R}, |\cdot|)$

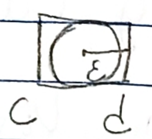


Άρα θα πάρω $\left(x_0-\frac{\varepsilon}{2}, x_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ και $\left(y_0-\frac{\varepsilon}{2}, y_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)$



Πρέπει ν.δ.ο. περιέχεται όλο το τετράγωνο μέσα στη μπάλα και άρα μέσα στο A, άρα είναι ανοιχτό ως προς τη 2η τοπολογία.

Πρέπει όμως, ν.δ. και το αντίθετο.



$\varepsilon = \min \frac{c-d}{2}$

$$\mathcal{E} = \underset{i\in I}{X} \mathcal{E}_i \,,\quad x : I \to \bigcup \mathcal{E}_i : x(i) \in \mathcal{E}_i$$

$$\underset{i\in I}{X} \mathcal{E}_i = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \times \dots \times \mathcal{E}_i \times \dots \times \mathcal{E}_n$$

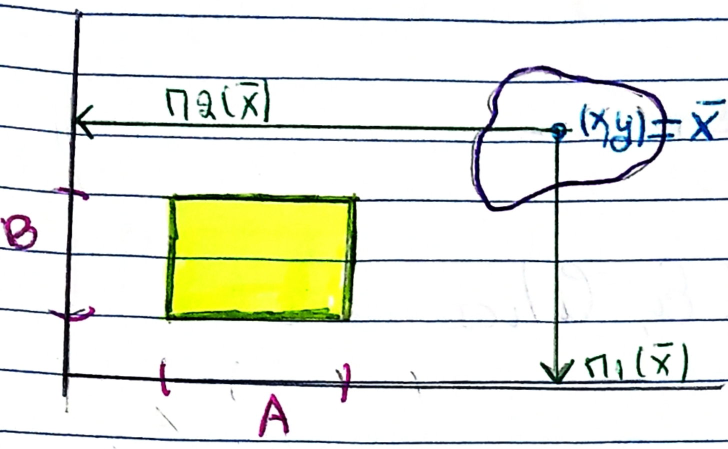
$$\mathcal{B} = \{ \underset{i\in I}{X} U_i \,,\; U_i \in \mathcal{T}_i \,,\; i \in I \} \qquad (\mathcal{E}_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}.$$

$$\{ B_1, B_2 \in \mathcal{B} \,,\; x \in B_1 \cap B_2 \} \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B} \quad x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$$

$$B_1 \cap B_2 = (\underset{i\in I}{X} U_i) \cap (\underset{i\in I}{X} V_i) \overset{\text{ισχύει; (H.W.)}}{=} \underset{i\in I}{X} (U_i \cap V_i)$$

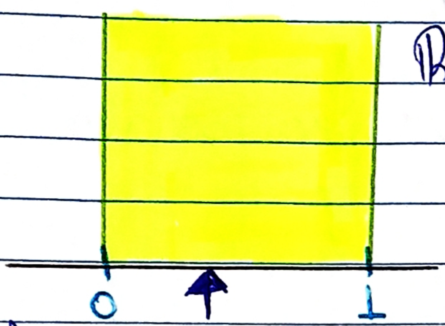
Αποδείξτε ότι η $\mathcal{B}$ είναι βάση για ένα καρτεσιανό γινόμενο. (H.W.)

Ορίζω μια διαφορετική τοπολογία για τον $\mathcal{E} = \bigtimes_{i \in I} E_i$



$\pi_1(\bar{x}) = \bar{x}$
$\pi_2(\bar{x}) = \bar{y}$

Οι προβολές είναι όσες και τα στοιχεία του $\mathcal{E}$: $\pi_i(\bar{x}) = \bar{x}(i) \in E_i$.



$\mathbb{R}^{[0,1]=I}$ $\quad X : [0,1] \to \mathbb{R}$

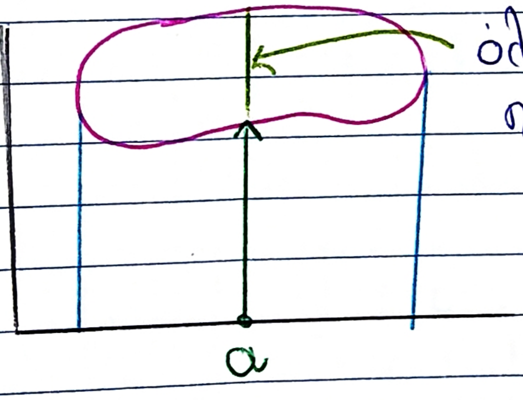
↳ συναρτήσεις.

$\pi_i(x)$: είναι αριθμός

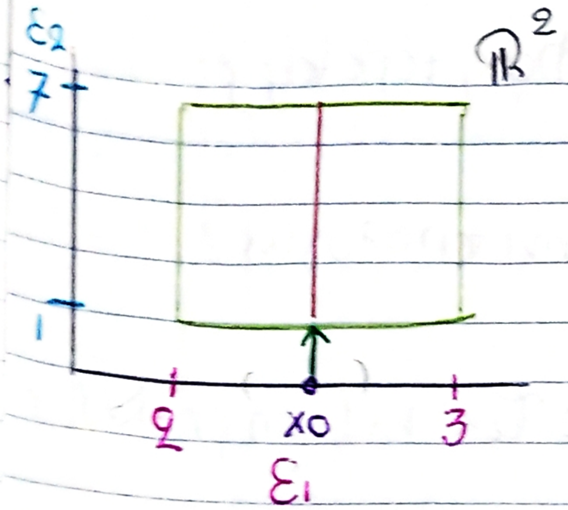
όλες οι συναρτήσεις (συνεχείς, ασυνεχείς κλπ)

$\pi_i : \bigtimes_{i \in I} E_i \to E_i$ με τύπο $\pi_i(\bar{x}) = \bar{x}(i)$

$U_i \in \mathcal{T}_i$. Για να φτιάξω τοπολογία παίρνω ένα στοιχείο στο E_i και το αντιστρέφω. $\pi_i^{-1}(U)$



όλα τα στοιχεία έχουν ως προβολή το a.



$\pi^{-1}(x_0) = \{x_0\} \times [1,7]$: ευθεία

Στον $\mathbb{R}^3$ θα έβρισκα ένα επίπεδο
$\pi^{-1}(x_0) = \mathbb{R} \times \{x_0\} \times \mathbb{R}$ (π.χ.)

Άρα $\pi_i^{-1}(U_i) = \bigtimes_{j \in I} Y_j \qquad Y_j = U_i \quad i=j, \qquad Y_j = E_j \quad i \neq j$ Τύπος

- ↳ παίρνω δηλαδή όλο το υπόλοιπο χώρο σε καρτεσιανό γινόμενο, εκτός από τη θέση i που παίρνω το U.

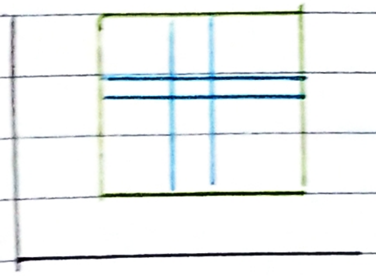
Τοπολογία Γινόμενο

$S_i = \{\pi_i^{-1}(U_i),\ U_i \in \tau_i\}$
(παίρνω όλα τα ανοιχτά σύνολα από κάθε τοπολογία και τα αντιστρέφω).

- $S' = \bigcup_{i \in I} S_i$ Αυτό το σύνολο αποδεικνύεται ότι είναι υπόβαση

$S_{\tau\epsilon} = \tau_p$: τοπολογία γινόμενο
Αν πάρω τις ενώσεις αυτών, δεν είναι μέσα στο σύνολο.

Παράδειγμα



Η ένωση είναι "σταυρός" όχι λωρίδα.
Ενώ η τομή μας δίνει παρ/λο
Άρα είναι υπόβαση, η $S_{\tau\epsilon}$

∘ Στις 2 διαστάσεις βγαίνω την box topology.
∘ Στις άπειρες διαστάσεις, όμως, όχι!

Η box topology είναι λεπτότερη από την τοπολογία γινόμενο, στα άπειρα σύνολα.

$\mathcal{B}_p = \{ \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}),\ U_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k},\ k=1,\dots,n,\ n \in \mathbb{N} \}$

↳ πεπερασμένες τομές από αντίστροφες προβολές

Το $\underset{i \in I}{\times} U_i$ δεν ανήκουν στην $\mathcal{B}_p$.

(*) Box και γινόμενο topology συμπίπτουν στα πεπερασμένα, στα άπειρα όμως όχι.

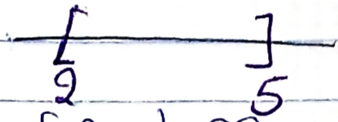
Ορισμός (Σχετική Τοπολογία Ή Υπόχωρος)

$(E, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $\emptyset \neq X \subseteq E$. Τότε το σύνολο $\mathcal{T}_X := \{ X \cap U : U \in \mathcal{T} \}$ καλείται σχετική τοπολογία (τοπολογικός υπόχωρος, supspace) στο X.

Πρέπει ν.δ.ο. η $\mathcal{T}_X$ είναι τοπολογία στο X (H.W.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- $\mathcal{E} = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ $X = [2,5]$



$(0,4) \in \mathcal{T} \Rightarrow (0,4) \cap [2,5] = [2,4) \in \mathcal{T}_X$

↳ ανοιχτό στην $\mathcal{T}_X$

- $Y = [2,5] \cup \{6\}$

$\{6\} \notin \mathcal{T}$, αλλά $\{6\} \in \mathcal{T}_X$, γιατί $\{6\} = Y \cap (5,7)$.

- Στην σχετική τοπολογία το $\{6\}$ είναι ανοιχτό.

Αφού είναι ανοιχτό, βρείτε μια μπάλα που να περιέχεται εξ' ολοκλήρου εκεί.
($B(6,\varepsilon)$ με κέντρο το 6 και ακτίνα $\varepsilon < 1$)

$(\mathcal{E}, \preceq)$
↑ διάταξη

Ορίζω αρχικά τα ανοιχτά διαστήματα

- $(a,b) = \{x \in \mathcal{E} : a < x < b\}$
- $[a_0, b) = \{x \in \mathcal{E} : a_0 \le x < b\}$ Εφόσον, $\exists a_0$ ελάχιστο της $\mathcal{E}$ $\}$ $\mathcal{T}$
- $(a, b_0] = \{x \in \mathcal{E} : a < x \le b_0\}$ Εφόσον, $\exists b_0$ μέγιστο της $\mathcal{E}$

Αποδεικνύεται ότι τα παραπάνω είναι βάση για την τοπολογία και μπορώ να φτιάξω μια τοπολογία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- $\mathbb{R} \le \mathcal{T}(a,b) : a < b\}$ → παίρνω τη συνήθη τοπολογία